Mathematik   Rechnen nach Regeln

Wir haben gesehen, wie man Zahlen sinnvoll niederschreiben kann, so dass sie zum Zählen bis zu beliebig großen Zahlen nach einfachen und leicht merkbaren Grundsätzen taugen.

Diese Zahlen sind aber nicht nur zum Zählen und für *Buchhaltung* geeignet, sondern man kann mit ihnen auch leichter rechnen, d.h. aus zwei Zahlen wird eine neue dritte ermittelt usw. Und das kann man beliebig oft wiederholen. Dabei sind aber gewisse Rechenregeln zu beachten. Diese wollen wir genauer ansehen.
Dazu hat ein Rechenmeister, - ein Herr Adam Riese hat das letztlich bei uns in Europa vor 500 Jahren so eingeführt – klare Regeln definiert, damit man mit ganz wenigen Regeln mit beliebig großen Zahlen rechnen kann.

Adam Ries im 58. Lebensjahr, einzige zeitgenössische Abbildung des Rechenmeisters, 1550   (aus Wikipedia)

Die einfachste Rechenregel ist das Zusammenzählen. Diese haben wir bereits genutzt, als wir aus 0 und 1 alle anderen Zahlen erzeugt haben.

Dabei braucht man sich nur die Regeln für 0 -9 zu merken.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	b
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
6	6	7	8	9	10	11					
7	7	8	9	10	11	12					
8	8	9	10	11	12	13					
9	9	10	11	12	13	14					

a

Fülle die Tabelle noch vollends aus.

An dieser Tabelle fallen verschiedene Regeln auf, die wir wieder in einer Tabelle zusammenstellen können:
Was beobachtest Du denn ?

- Gerade ungerade Zahlen; muss Du immer rechnen oder kannst Du ablesen
- Eine Summe der Zahl mit sich selbst also a + a ist eine gerade Zahl, jede gerade Zahl ist durch 2 teilbar
  eine ungerade Zahl entsteht aus einer geraden + 1
- male mit Farbe die geraden und ungeraden Zahlen an
- Symmetrien   male diese an mit Farbstift

Alle diese Regeln gelten für beliebige Zahlen. Diesen geben wir einfach mal mit einem Buchstaben a einen Namen.
Das ist ein generelles Vorgehen der Mathematiker. Die Mathematiker interessieren sich nicht für die einzelne Zahl 125 oder 17 oder 1234 sondern suchen nach Regeln, die für beliebige Zahlen gelten. Also gibt man dieser beliebigen Zahl einen Namen ***a*** *oder* ***b*** *oder …*

0 + a	=	a		Kombiniert man beide Zeilen ergibt sich: 0 + a = a + 0 = a
a + b	=	b + a	Dies ersieht man aus der Symmetrie in der Tabelle Beweis: Gilt für alle Zahlen (siehe unten)	
			Jede Zahl kann aus Zahlenpaaren und der Addition erzeugt werden z.B. 12=1+11=2+10=3+9= ….. oder aus einem Dreierpack 12 = 1+2+9=3+5+4=….. oder aus einem Viererpack …. oder aus einem 12er Pack 12 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 so ist die 12 definiert worden.	Oder 12=5+4+3=3+5+4 wenn man die zweite Regel mit benutzt
a + 1	=	b	b ist die Nachfolgerzahl von a ; b > a	

Merkt man sich diese Regeln, dann braucht man nicht alle 100 Ergebnisse des Zusammenzählens von 0 - 9 auswendig zu lernen.

Es ist eine zentraler Grundsatz der Mathematik, dass man möglichst keine Sammlung von Einzelfällen auswendig lernt, sondern sich nur Regeln merkt und diese anwendet.

Die vorstehenden Regeln gelten für alle Zahlen nicht nur für 0 – 9. Man kann die Tabelle ja weiter treiben.

	1	**2**	**5**	
+		**1**	**7**	
	0	1		Übertrag nach Regel 9 + 1 = 10
	1	**4**	**2**	

Diese Regeln für die „natürlichen“ Zahlen sind direkt nachvollziehbar. Auf jeder Stelle einer mehrstelligen Zahl wird nach obiger Tabelle gerechnet.

Was ist aber mit der Regel: $a + b = b + a$? Man kann beliebig viele Versuche machen, aber gilt diese Regeln wirklich für alle Zahlen a und b ?
Was ist ein Beweis?
Mathematiker probieren es zwar für einige Fälle aus, aber damit würde man nie fertig werden, weil es unendlich viele Paare gibt.
Der Mathematiker macht einen Beweis. Was ist ein Beweis?
Man geht zurück auf ein einfache Grundregel (Axiom) und versucht mit logischer Schlussfolgerung die Behauptung $a + b = b + a$ als richtig zu finden. Wie geht das für unsere Zahlenpaare?
Die Grundregel ist, dass jede Zahl eine Folge von Summen aus 1 ist, z.B. $7 = 1+1+1+1+1+1+1$
Dann ist $7 + 5 = (1+1+1+1+1+1+1) + (1+1+1+1+1)$. Die Klammer können wir weglassen und dann beliebige Gruppen von 1-ern neu zusammenfassen. Unter diesen gibt es dann auch eine 5-er Gruppe und rechts daneben eine 7-er Gruppe von 1-ern und wir haben an der Abfolge nichts geändert und erhalten $5 + 7$. Wir können aber auch $1 + 11$ oder $2 + 10$ oder $3 + 9$ oder … Gruppierungen machen und sehen, dass das immer geht. Das interessiert aber hier nicht.
Da jedes Zahlenpaar $a + b$ in eine 1-er Folge zerlegt werden kann und andere 1-er Gruppen gebildet werden können, ist die Aussage $a + b = b + a$ für beliebige Zahlen gültig.

Umkehrung von Summe + ist die Differenz -

Die Mathematiker sind immer bestrebt, nach Rechenvorschriften zu suchen, die die Umkehrung einer anderen sind.

Welche Operation macht eine Summe a + b rückgängig ?

a + b – b = a oder **b + a – b = a** oder **-b + a + b = a**

Das ist die Subtraktion oder das Abziehen von Zahlen.
Das kennt jeder aus Aufgaben wie: Wir haben 5 Kinder und 3 Äpfel. Jedes Kind soll einen Apfel bekommen. Das geht nicht, weil 2 Äpfel fehlen. Wie stellt man das mathematisch dar?

3 – 5 = 1+1+1 – (1+1+1+1+1) = - 2 es fehlen 2 Äpfel.

In der Schule macht man solche Sachen mit Hilfe des Zahlenstrahls deutlich.

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Wir sehen, dass - (1+1+1+1+1) = -1-1-1-1-1 ist.

Was ist hier passiert. Wenn wir abziehen wollen und das für alle Zahlen gelten soll, brauchen wir neue Zahlen, die negativen Zahlen.
Summenbildung funktioniert innerhalb der „natürlichen“, den Zählzahlen, den positiven Zahlen.

Differenzbildung oder Abziehen oder Subtraktion setzt die negativen Zahlen voraus.
Wie stellen wir negative Zahlen dar ?
Brauchen wir neue Ziffern oder schreiben wir einfach ein Minus-Zeichen vor eine positive Zahl und fertig sind die negativen.
Das hat lange gedauert, bis die Menschen auf diesen einfachen Trick kamen!!

Zu welchem Ergebnis führen nun die Subtraktion der Zahlen aus den Ziffern 0 – 9 ?

-	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**b**
0	**0**	**-1**	**-2**	**-3**	**-4**	**-5**	**-6**	**-7**	**-8**	**-9**	
1	**1**	**0**	**-1**	**-2**	**-3**	**-4**	**-5**	**-6**	**-7**	**-8**	
2	**2**	**1**	**0**	**-1**	**-2**	**-3**	**-4**	**-5**	**-6**	**-7**	
3	**3**	**2**	**1**	**0**	**-1**	**-2**	**-3**	**-4**	**-5**	**-6**	
4	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**	**-1**	**-2**	**-3**	**-4**	**-5**	
5	**5**	**4**	**3**	**2**							
6	**6**	**5**	**4**	**3**							
7	**7**	**6**	**5**	**4**							
8	**8**	**7**	**6**	**5**							
9	**9**	**8**	**7**	**6**							
a											

Was beobachtest Du ?

- Vervollständige die Tabelle
- Hier tauchen doch neue Zahlen auf?   Wie sind die gebaut ?
  Negative Zahlen = Menge der ganzen Zahlen nur vorne dran ein – Zeichen
- aus der Tabelle ersehen wir noch mehr Eigenschaften:

$a - 0$	=	a	
$0 - a$	=	$-a$	
$a - a$	=	0	
$a - b$	$\neq$	$b - a$	Das ist hier neu; die Subtraktion ist **nicht** symmetrisch !!!! Ließen wir aber das - Zeichen einfach mal weg, ist die Tabelle doch wieder symmetrisch
$a - 1$	=	c	Die Vorgängerzahl und die kann negativ sein. $0 - 1 = -1$ oder $-2 - 1 = -3$ oder $a < b$
$(-a) + (+b)$	=	$-a + b$	$= b - a$ + kann man vertauschen
$a + (-b)$	=	$a - b$	**Wir haben also die Regeln** **+ - oder - + ergeben -** **und** **+ + oder - - ergeben +**
$a - (+b)$	=	$a - b$	
$a - (-b)$	=	$a + b$	

Was passiert, wenn + und – in einer Rechnung zusammentreffen ?

Was würde passieren, wenn wir die obigen + - Regeln nicht so festlegen würden?
Es gilt doch $0 + 0 = 0$ und wenn wir $0 = a - a$ ersetzen
$(a - a) + (b - b) = 0$
dann ergibt sich mit den obigen Regeln und der Regel $a + b = b + a$

$$\underline{a + (-a) + b + (-b) = a + b + (-a) + (-b)} = a + b - a - b = 0$$

das richtige Ergebnis.

Bei jeder anderen Wahl würden wir auf $0 + 0 \neq 0$ kommen, was offensichtlich Unsinn ist.

Wiederholte Summen   Die Multiplikation

eine neue Operation, die aber nur eine verkürzte Schreibweise wiederholter Additionen ist

Man führt immer wieder Abkürzungen ein, benutzt ein neues Zeichen * und sieht zu welche Regeln dann zu nutzen sind.

a + a + a = 3 * a   oder   a + a + a + a + a + a = 6 * a

oder allgemein   a * b =   b wird a-mal mit sich addiert.

Was ergibt das für die Zahlen 0 – 9 ??

*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	b
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	
3	0	3	6	9	12	15	18	21				
4	0	4	8	12	16	20	24	28				
5	0	5	10	15	20	25	30	35				
6	0	6	12	18	24	30	36	42				
7	0	7	14	21	28	35	42	49				
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	
10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	
a												

(Nach Gebert: Mathematik spielend lernen?)

Wie soll man sich das denn alles merken? Muss man doch die 100 Ergebnisse, das kleine Einmaleins auswendig lernen ?
Nein, nur einen kleinen Teil - die Zahlen in blau oder violett. Der Rest ergibt sich aus den nachfolgenden Regeln:

a * 0	=	0	Mit nachfolgender Regel: 0 * a = 0
a * 1	=	a	Mit nachfolgender Regel: 1 * a = a
a * b	=	b * a	Ah ha ! Wieder symmetrisch Na ja wir haben es hier ja mit einer Abkürzung der Addition zu tun!
Wie sieht es hier mit + - gemischten Zahlen aus ??			
(-a) * (+b)	=	- a*b	**Wir haben also die Regeln** **+ - oder - + ergeben -** **und** **+ + oder - - ergeben +**
a * (-b)	=	- a*b	
a * (+b)	=	a*b	
(-a) * (-b)	=	a*b	

Später haben sich die Mathematiker noch eine weitere Abkürzung einfallen lassen:

Vielfache Multiplikation $a*a*a = a^3$ und deren Umkehrung

Aber das lassen wir für die Schüler am Gymnasium. Auch hierfür gibt es wieder einen Satz von Regeln, wie bei den **+ - * /** Rechenvorschriften.

Umkehrung der Multplikation   die Division / geteilt durch

Komplizierter wird es mit der Umkehrung der Multiplikation, aber es tauchen hier wieder ganz ähnliche Regeln auf.

/	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	b
0	###	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	###	1	0,5	0,333	0,25	0,2	0,167	0,143	0,125	0,1111	0,1	
2	###	2	1	0,667	0,5	0,4	0,333	0,286	0,25	0,2222	0,2	
3	###	3	1,5	1	0,75	0,6	0,5	0,429	0,375	0,3333	0,3	
4	###	4	2	1,333	1	0,8	0,667	0,571	0,5	0,4444	0,4	
5	###	5	2,5	1,667	1,25	1	0,833					
6	###	6	3	2	1,5	1,2	1					
7	###	7	3,5	2,333	1,75	1,4	1,167					
8	###	8	4	2,667	2	1,6	1,333					
9	###	9	4,5	3	2,25	1,8	1,5	1,286	1,125	1	0,9	
10	###	10	5	3,333	2,5	2	1,667	1,429	1,25	1,1111	1	
a												

Hopla, wenn wir die Multiplkation umkehren wollen, geht es nicht mehr mit unseren bisherigen Zahlen. Auch der Computer bekommt bei manchen Kombinationen Probleme.
Wir brauchen wieder eine neue Menge von Zahlen die „gebrochenen Zahlen“

½, ¾, 1/10,   13/17,   125/1234   usw.

Rechne doch mal ¾   oder 7/5 und   7/8   aus und fülle die Tabelle komplett aus.

In den „gebrochenen“ Zahlen sind die „natürlichen“ Zählzahlen mit drin: 3/1 = 3, 6/2 = 3, 12/4=3, die 3 ist das Ergebnis von unendlichen vielen gebrochenen Zahlen !

<u>Mit jeder neuen Umkehrfunktion, muss man offensichtlich die Menge der Zahlen ausbauen !!!</u>
<u>Bei   – als Umkehrung von + mussten wir die negativen Zahlen (-1, -5, -125) neu einführen</u>
<u>Bei / als Umkehrung von * (was die wiederholte Summierung derselben Zahl ist) müssen wir gebrochene Zahlen nutzen.</u>

Trotzdem können wir aus obiger Tabelle wieder Regeln ersehen:

a / 0	=	**Verboten !!**	angenommen a/0 = b dann wäre wohl a = b*0 = 0 für alle a und b ???
0 / a	=	0	
a / b	≠	b / a	
x*a/x*b	=	a/b für beliebige x Die Tabelle zeigt doch Symmetrien ½ = 2/4 = 3/6=4/8 ….. = 0,5 Finde mehr davon	
Wie sieht es hier mit + - gemischten Zahlen aus ??			
(-a) / (+b)	=	- a/b	**Wir haben also wieder die Regeln** **+ - oder - + ergeben -** **und** **+ + oder - - ergeben +**
a / (-b)	=	- a/b	
a / (+b)	=	a/b	
(-a) / (-b)	=	a/b	

Schwieriger wird es, wenn wir + - * und / gemischt haben ! Das lassen wir für die Gymnasiasten

Primzahlen
Aber eine überraschende Eigenschaft der Zahlen kann ein Grundschulkind schon verstehen und selber ausprobieren, sobald man ganze Zahlen teilen kann:
Man kann jede „natürliche Zahl in die Multiplikation von anderen „natürlichen“ Zahlen (Faktoren) zerlegen,

13 = 1 * 13   oder
24 = 2 * 12 = 2 * 2 * 6 = 2*2*2*3 oder
125 = 5*25 = 5*5*5

Probiere es selbst mit 126! oder 1234 aus!

Die Zahlen 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ……., die man nicht weiter zerlegen kann, nennt man Primzahlen, das sind Zahlen, die man nur durch sich selbst oder durch 1 teilen kann. Wo tauchen die in der obigen Tabelle auf ?
Alle Primzahlen sind ungerade!   Warum?
Es ist bis heute nicht gelungen, eine Regel zu beweisen, wie dicht die Primzahlen aufeinander folgen.
Das ist ein sehr nettes Beispiel, dass in den gewöhnlichen Zahlen eine ganz nützliche Strukturen auf tauchen.