Mathematik spielend lernen (eine realistische Utopie)

(Prof. Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert, TU München)

Mathematik, bloß nicht!

Als Mathematiker ist man es gewohnt: Das teils betroffene, teils ehrfürchtige Schweigen, wenn man sich einer neuen Gruppe von Menschen vorstellt und bekennt, dass man sich professionell mit Mathematik beschäftigt. Die folgenden Reaktionen reichen dabei meist von schnellem Rückzug über ein schüchternes „Oh, Je" bis hin zu einem offensiven, „Ja, ja, mit Mathematik hatte ich schon immer meine Schwierigkeiten. Können wir bitte über etwas anderes reden?" Die persönlichen Gründe für diese Reaktionen reichen dabei zumeist weiter zurück, als man zunächst denkt. Auf Nachfragen stellt man zumeist fest, dass viele Personen der festen Überzeugung sind, dass sie selbst Mathematik ohnehin nicht verstehen und schon seit langer Zeit „abgehängt wurden". Diese Erfahrung reicht nicht selten bis in die Grundschulzeit zurück.

Der folgende Text verfolgt dreierlei Ziele. Er soll ein wenig Ursachenforschung betrieben, worin derartige Mathematikängste ihre Ursprünge haben und wie sie aus verständlichen Verhaltensmustern aller Beteiligten (Schüler, Lehrer, Eltern) entstehen. Er soll exemplarisch aufzeigen, wie man mathematische Themen spielerisch im Dialog entwickeln kann und dabei die Lernenden aktiv einbezieht. Drittens soll er Mut machen, die Auseinandersetzung mit Mathematik nicht aufzugeben, auch wenn man glaubt, schon lange den Anschluss verloren zu haben (als Schüler, Elternteil oder vielleicht auch als Lehrer).

Mathematik für Mathematiker

Kinder im Vor- und Grundschulalter haben zumeist noch ein ausgesprochen unbefangenes Verhältnis zur Mathematik. Zählen, Vergleichen, Ordnen sind Tätigkeiten, die mit viel kreativem Spaß und oftmals direkten Erfolgserlebnissen verbunden sind. Für Kinder hat Mathematik dabei oft eine fast magische Komponente: „Alles geht so schön auf", „Die Dinge passen überraschend gut zueinander". Mit einer solchen Herangehensweise sind Kinder in diesem Alter dem Bild, das ein „richtiger Profimathematiker" von Mathematik hat, oftmals auf überraschende Weise näher, als zu vielen späteren Zeitpunkten ihrer Schullaufbahn. Redet man mit Personen, die sich professionell mit Mathematik beschäftigen, über Mathematik, so dauert es häufig nicht lange bis Adjektive wie *schön*, *spannend*, *überraschend* fallen. Viele Mathematiker beziehen ihre eigene Motivation nicht zuletzt aus diesen Elementen. Diese Elemente treten schnell zu Tage, wenn man sich mit Mathematik in einer Weise beschäftigt, die über das bloße auswendig Lernen hinausgeht.

Dabei ist Mathematik ungemein nützlich. Kein Handy, kein CD-Spieler, kein GPS, kein Computer, keine Kernspin-Tomographie würde funktionieren, wenn es nicht Menschen gäbe, die sich mit den Teilen der Mathematik beschäftigen, die in den jeweiligen Geräten zum Einsatz kommen. (Die Liste der Anwendungen lässt sich natürlich endlos fortsetzen und beginnt nicht erst mit der modernen High-Tech Kultur. Gerade in diesem Bereich ist es allerdings so, dass Mathematik fast allgegenwärtiger Bestandteil ist, ohne dass es den meisten Benutzern bewusst wäre).

„Mathe-madig"

Vergleicht man das naive und spielerische Herangehen von Kindern im Vorschulalter mit dem Verhalten von Kindern in der dritten oder vierten Klasse, so ist die Bilanz oftmals erschreckend. Im Verlauf der Schulausbildung wird das direkte, oft neugierige Herangehen an Mathematik ersetzt durch Auswendiglernen und Anwenden von Regeln, ohne diese verstanden und hinterfragt zu haben. Die Kategorien „richtig" und „falsch" werden wichtiger als Verstehen und Nachvollziehen. Dies ist auch verständlich, denn der Lehrplan drängt. All zu viele vertiefende und interessante Fragen kann sich der Lehrer nicht leisten, sonst läuft ihm die Zeit weg.

Der sichere Weg einen Aufgabentyp, der im Lehrplan (oder von den Bildungsstandards) vorgeschrieben ist, zu beherrschen, führt nicht selten über ein Kochrezept – einfache Regeln, die, wenn man sie nur richtig und nacheinander befolgt, zum korrekten Ergebnis führen. Der Pfad ist schmal. Ein kleiner Fehler oder eine Vertauschung der notwendigen Schritte führt zumeist nicht dazu, dass eine Lösung „ein bisschen schlechter" wird, sie wird schlicht und einfach „falsch". In diesem Punkt unterscheidet sich die Mathematik fundamental von den geisteswissenschaftlichen Fächern (wird eine Faustregel zum Erstellen eines Aufsatzes nicht exakt befolgt, so führt dies zu einer graduellen Verschlechterung des Aufsatzes und nicht dazu, dass der Aufsatz plötzlich sinnlos wird). Fehlt aber den Schülern die Möglichkeit der zusätzlichen Selbstkorrektur durch *echtes Verstehen*, so entsteht für diese der Eindruck, dass Mathematik ausschließlich durch peinlich genaues auswendig lernen zu bewältigen ist. Die mathematischen „Deformationen", die im Verlauf der ersten Schuljahre auftreten, sind vielfältiger Art. Punktuelle Untersuchungen (vgl. unter anderem Spiegel und Selter 2003, in ihrem wunderbaren Buch „Kinder und Mathematik") belegen unter anderem, dass häufig die folgenden typischen Verhaltensmuster zu beobachten sind:

- *Jede Aufgabe muss gelöst werden:* Man beobachtet die Tendenz, dass Schüler der Klassen drei und vier viel häufiger dazu neigen, auch für (bewusst gestellte) offensichtlich sinnlose Aufgaben Lösungen angeben zu wollen, als vergleichsweise Schüler in der Vorschule oder der ersten Klasse.
- *Der gesunde Menschenverstand wird ausgeschaltet:* Es kommt nicht selten vor, dass man einem falsch angewandten Kochrezept mehr vertraut als einer eigenen Rechnung im Kopf. („Eigentlich müssten 3 Euro rauskommen, aber wenn ich dass so mache wie in der Schule, dann sind es 43 Euro, also sind es 43 Euro" – Schülerzitat).
- *Gelernte Rezepte werden immer angewandt:* Das Anwenden von Kochrezepten wird auch dann bevorzugt, wenn es offensichtliche Abkürzungen gibt, welche die Lösung fast trivial machen (Was ist $(2421 \cdot 29)-(2421 \cdot 27)$?). Nicht selten führt dies zu unnötig umständlichen und fehleranfälligen Rechenwegen.
- *Aufgaben, die man nicht kann, werden überhaupt nicht bearbeitet:* Schaut man sich Klassenarbeiten von Grundschülern an, so stellt man oft fest, dass Schüler dazu neigen, Aufgaben bei denen der Weg von vorneherein nicht klar ist, gar nicht zu bearbeiten („Und was sollen wir da jetzt machen?" – Schülerzitat).

Verständlicherweise wird Mathematik somit schnell zum Angst beladenen Fach, da das Wohl und Wehe vermeintlich davon abhängt, dass man Vorgänge, die man in ihrer Sinnhaftigkeit weder durchschaut noch hinterfragen kann, exakt befolgt. Je geringer das Verständnis desto notwendiger wird das Korsett eines Kochrezeptes.

Aktuelle Mathematikschulbücher versuchen diesen Tendenzen zwar entgegen zu wirken, indem alternative Lösungsstrategien angeboten werden, oder indem bei Textaufgaben bewusst auch irrelevante Informationen eingestreut werden. Die Praxis im Schulalltag erlaubt es aber zumeist nicht, diese Aspekte auch zu hinterfragen und zu problematisieren.

Duck and Cover

Bloß nicht auffallen. Wer fragt, gibt zu, etwas nicht verstanden zu haben. Nicht selten meinen Schüler, dass gerade in Mathematik das *nicht-Fragen* der sicherste Weg ist, das eigene Unverständnis so lange als möglich (im besten Falle bis zum nächsten Zeugnis oder gar bis zum Abitur) zu verbergen. Ein Teufelskreislauf aus dem nur schwer auszubrechen ist. Gerade hier ist es von fundamentaler Wichtigkeit, dass der Lehrer vermittelt, dass Fragen etwas immens Wichtiges sind (letztlich der Ursprung aller Erkenntnis). Die Frage eines Schülers kann unter Umständen den Kernpunkt einer Problematik treffen und für die ganze Klasse zum tieferen Verständnis beitragen. Im besten Fall versteht es ein Lehrer sogar sich für gute Fragen beim Schüler zu bedanken.

Es soll hier nicht verschwiegen werden, dass das ehrliche Zulassen von Fragen für den Lehrer auch durchaus problematische Seiten mit sich bringt. Gerade in der Mathematik besteht die Grenze von Problemen, bei denen alles einfach und beantwortbar ist, zu Problemen, die fundamental schwer sind, oftmals nur aus einer minimalen Formulierungsänderung. (Jeder kennt wohl den Satz von Pythagoras, dass im rechtwinkligen Dreieck für die drei Kantenlängen die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ gilt und es fällt auch nicht schwer, kleine Zahlenbeispiele dafür anzugeben, $3^2 + 4^2 = 5^2$. Aber gibt es solche ganzzahligen Lösungen auch für andere Exponenten? Das führt direkt zum über dreihundertfünfzig Jahre unbewiesenen und erst kürzlich geknackten „Letzen Satz von Fermat"). Das Zulassen von Fragen im Mathematikunterricht bedeutet gleichsam auch das Zulassen des eigenen Unwissens des Mathematiklehrers. Dies ist zwar eine menschliche Herausforderung, sie offenbart allerdings auch immens viel über das Wesen der Mathematik. Der Mathematiklehrer ist mit einem solchen punktuellen Unwissen in bester Gesellschaft – Mathematikprofessoren geht das auch nicht anders. Im Gegenteil: Gerade die Auseinandersetzung mit Fragen, bei denen der Mathematiklehrer auch nicht sofort eine Antwort weiß, führen einerseits oftmals zu spannenden Fragen und machen andererseits den Unterricht lebendiger und, nicht zuletzt, menschlicher.

Kinder denken anders

Woher sollen Kinder wissen, wie sie über Mathematik denken sollen und was Erwachsene genau von ihnen erwarten. Letztlich kann diese gesellschaftliche Normierung von Begriffen und Denkweisen nur über einen Dialog von Kindern und Erwachsenen, Schülern und Lehrern entstehen. Oftmals wird hierbei aber vollkommen außer Acht gelassen, dass auch der Schüler eine in sich stimmige Gedankenwelt haben kann, die vielleicht nur nicht den gesellschaftlich festgelegten Normen der Erwachsenenwelt entspricht. Die Gedankenwelt des Kindes bleibt dabei nicht selten dem Erwachsenen vollkommen verschlossen, da sie vorschnell als falsch abgetan wird. Ein beeindruckendes Beispiel, aus dem oben bereits erwähnten Buch „Kinder und Mathematik" soll dies belegen: *Die Familie sitzt beim Abendbrot. Der dreieinhalbjährige Fabian zählt seine Häppchen. „Eins – zwei – drei – vier – fünf – sechs – sieben – acht – neun". Dann isst er ein ‚Häppchen' auf und zählt erneut „Eins – zwei – drei – vier – fünf – sieben – acht – neun". „Du hast die sechs vergessen", korrigiere ich ihn. „Es heißt doch fünf – sechs –sieben." Erstaunt sieht er mich an und erklärt: „Nein, die hab' ich nicht vergessen. Die ist doch schon in meinem Bauch.* (Aus Spiegel und Selter, 2003).

Ein dichtes Netz zerreist nicht so leicht

Ich selbst war im Kopfrechnen immer ziemlich schlecht, ehrlich. Im Nachhinein betrachtet glaube ich, dass genau darin eine Ressource lag, die mich heute zu einem guten Mathematiker gemacht hat (Vorsicht, jede Art von Verallgemeinerung oder Umkehrschluss ist hier nicht zulässig). Genötigt durch die Unzuverlässigkeit meiner Kopfrechenergebnisse war ich gezwungen, meine Resultate auf die verschiedensten Arten auf ihre Richtigkeit zu überprüfen. Hierzu lernte ich früh nach verborgenen Zusammenhängen von Aufgabenstellung und Ergebnis zu suchen, die als Indikatoren für die Korrektheit dienten. (Sind zwei Zahlen durch drei teilbar, so ist ihre Summe auch durch drei teilbar). Rückblickend sehe ich, dass ich in dieser frühen Phase eigentlich Mathematik betrieben habe. Mit der Zeit entwickelte sich eine Art intuitives Gespür für die Richtigkeit eines Ergebnisses.

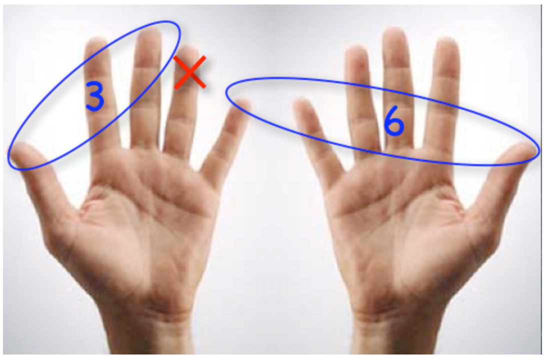
Viele dieser Verfahren und Konsistenzchecks sind unmittelbar elementar verstehbar und könnten im Unterricht leicht vermittelt werden. Natürlich ist es wichtig, das kleine Einmaleins weitestgehend sicher und flott zu beherrschen. Doch irren ist menschlich (insbesondere unter dem Stress von Mathematikarbeiten). Werden jedoch zusätzlich zu engen elementaren Verfahren auch begriffliche Zusammenhänge vermittelt, stärkt das die geistige Flexibilität und nicht zuletzt das Selbstbewusstsein des Schülers. Pädagogen äußern an dieser Stelle oftmals die Angst vor begrifflichen Verwirrungen gerade bei leistungsschwächeren Schülern. Man sollte allerdings bedenken, dass sich selbst in einfachen und elementaren Bereichen überraschende Strukturen verbergen, die man übersieht, wenn man auf bloßes schnelles auswendiges Repetieren reduziert wird. Im folgenden Beispiel soll dies anhand des kleinen Einmaleins verdeutlicht werden.

Das kleine Einmaleins

Sicherlich zählt das sichere Beherrschen des kleinen Einmaleins zu einem der fundamental wichtigen Lerninhalte, die im Rechenunterricht der ersten vier Klassen vermittelt werden müssen. Ist es doch Grundlage für wichtige schriftliche Rechenverfahren, für Überschlagsrechnen und für vieles, was später noch kommen wird. Dennoch wirkt das übermäßige Trainieren von reflexartigem Beantworten von Einmaleins-Aufgaben oftmals eher kontraproduktiv. Reflexartig zu reagieren bedeutet, den Kopf weitestgehend auszuschalten – das Gegenteil von dem, was man bei

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	25	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

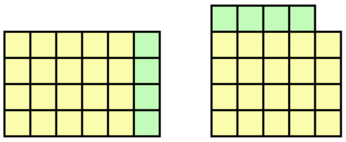
Mathematik eigentlich tun sollte. Die vermeintliche Notwendigkeit des Auswendiglernens ergibt sich an dieser Stelle aus der puren Stofffülle. Das kleine Einmaleins begegnet dem Schüler nicht selten als eine Tafel in der hundert Zahlen stehen. Hundert Ergebnisse, die man wissen muss. Dann folgt das Aufzählen von Reihen. Die Zweierreihe, die Fünferreihe, die Dreierreihe, und zum Schluss zumeist die Siebener und die Achter. Die Reihenfolge, in der die Multiplikationsreihen vermittelt werden, ist durchaus pädagogisch motiviert. Dem Schüler wird dies jedoch selten klargemacht oder visualisiert. Dadurch verbleibt häufig für den Schüler das unangenehme Gefühl hundert Aufgaben lernen zu müssen. Beachtet man jedoch, dass die Einer- und Zehnerreihe eigentlich sofort erlernbar sind, dass die Zweier- und die Fünferreihe in aller Regel auch sehr schnell lernbar sind (handelt es sich doch hier letztlich um Verdoppeln und Halbieren, was von der Addition her schon geläufig ist) und dass Umkehraufgaben (4·3 = 3·4) die Anzahl der Aufgaben praktisch halbieren, stellt man fest, dass von den ursprünglich hundert Aufgaben nur noch 21 übrig bleiben (im Bild oben grün und rot). Erarbeitet man zusätzlich noch „Nachbaraufgaben“ (solche bei denen einer der Faktoren nur um eins von einer einfachen Reihe entfernt liegt) durch eine einfache Addition, so verbleiben in der Tat nur drei „schwierige“ Multiplikationen (7·7, 7·8 und 8·8). Dennoch ist dies erst der allererste Anfang eines komplexen Begriffsgeflechts, das sich in der Multiplikationstafel offenbart. Beispielhaft sollen hier einige Zusammenhänge herausgegriffen werden. So ist beispielsweise die Neunerreihe von besonderer Schönheit: Die Zehnerstelle zählt immer um eins hoch, die Einerstelle um eins herunter. Die Summe beider Ziffern ist immer 9. Dies ist z.B. Grundlage eines einfachen Fingerrechentricks, um sich die Neunerreihe zu merken: Will man beispielsweise 4 mal 9 rechnen so hält man alle zehn Finger hoch und klappt den vierten Finger um. Die Ziffern des Ergebnisses werden von der ersten und der zweiten Fingergruppe gebildet.



4 mal 9 ist 36

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	25	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Quadratzahlen (1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100) haben viele bemerkenswerte Eigenschaften. So sind beispielsweise die Differenzen aufeinander folgender Quadratzahlen genau die ungeraden Zahlen (4-1=3, 9-4=5, 16-9=7,...). Ein weiterer überraschender Zusammenhang besteht zwischen den Quadratzahlen (die Zahlen auf der Hauptdiagonalen der Tabelle) und den Zahlen, die in der Tabelle schräg dazu benachbart sind. Diese sind genau um eins weniger als die Quadratzahlen. Man erhält also beispielsweise die Zusammenhänge $8 \cdot 8 - 1 = 7 \cdot 9$ oder $5 \cdot 5 - 1 = 4 \cdot 6$. Dieser Zusammenhang erscheint zunächst überraschend. Er lässt sich allerdings durch eine einfache Visualisierung vermitteln bzw. beweisen. Sie soll hier an einem Beispiel erläutert werden. Betrachtet man die Aufgabe $4 \cdot 6$. Diese lässt sich durch unten stehendes Bild visualisieren: vier mal sechs Kästchen. Trennt man eine der Spalten mit vier Kästchen ab und legt sie um, so erhält man bis auf ein Kästchen ein Quadrat von fünf mal fünf Kästchen. Dem Leser sei hier an dieser Stelle empfohlen, sich einmal eine halbe Stunde Zeit zu nehmen und nach weiteren Zusammenhängen in der Multiplikationstafel zu suchen oder noch besser mit seinen Kindern auf Entdeckungsreise zu gehen.



Der individuelle AHA-Punkt

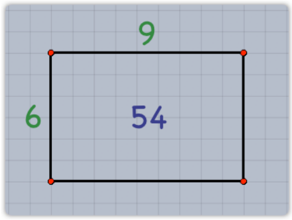
Es gibt zwei typische mathematische Grunderfahrungen, die wohl jeder das eine oder andere Mal gemacht hat. Sie lassen sich in zwei Sätzen charakterisieren: *„Ich fühle mich gerade hoffnungslos abgehängt!“* und *„Mensch, das war ja eigentlich ganz einfach!“*. So unterschiedlich die beiden damit verbundenen Lebensgefühle auch sein mögen, so eng hängen sie doch zusammen. Sie spiegeln die Momente *vor* beziehungsweise *kurz nach* einem individuellen „Aha-Erlebnis“ wieder. Im Erleben von Mathematik gibt es immer wieder solche Momente, vollkommen unabhängig, ob man nun Mathematik Professor oder Schüler in der vierten Klasse ist. Sie offenbaren einen tiefen Wesenszug der Mathematik: Mathematisches Vorankommen hängt immer wieder an Erkenntnisprozessen. Diese Erkenntnisprozesse sind hochgradig individuelle Erlebnisse. Niemand kann sie einem abnehmen. Sie passieren im Inneren des Bewusstseins. Ein guter Mathematikunterricht kann allenfalls versuchen, diese Erkenntnisprozesse zu stimulieren. Er kann sie den Schülern jedoch niemals abnehmen. So individuell wie Schüler sind, so individuell sind auch die Stimuli die letztlich einen Aha-Effekt auslösen. Manche Schüler verstehen ein bestimmtes Problem durch Lesen, andere durch Anfertigen einer Skizze, andere durch sorgfältiges Verschriftlichen und wieder andere dadurch, dass sie das Problem einem anderen Schüler erklären. Aufgabe der Schule sollte es an dieser Stelle sein, ein breites Spektrum an mathematischen Erfahrungsszenarien zu bieten, so dass Schüler auch herausfinden können, auf welche Weise sie am besten verstehen (dies kann sogar von Problemkreis zu Problemkreis variieren).

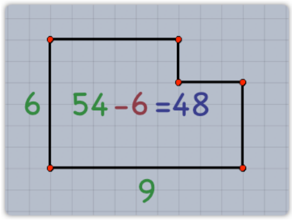
Diese persönlichen Erkenntnisprozesse bringen ein weiteres pädagogisches Problem mit sich: Bei einigen Schülern treten die Aha-Erlebnisse früher ein, bei anderen später. Oftmals ist man geneigt, an dieser Stelle vorschnell eine Einordnung in leistungsstarke und leistungsschwache Schüler vorzunehmen. Der Unterricht orientiert sich in seinem Aufgaben und Übungsangebot zumeist am Mittelfeld, in der Hoffnung, dass die stärkeren und schwächeren Schüler davon immer noch profitieren können. Man übersieht hierbei jedoch einige wesentliche Faktoren. Wird bei den so genannten leistungsschwächeren Schülern, der individuelle Aha-Moment einer Aufgabenstellung (beispielsweise beim *Runden*) nie erreicht, so bleiben auch große Mengen an Übungsmaterial letztlich fruchtlos, da systematisch immer die gleichen Fehler reproduziert werden. Umgekehrt kann bei den Schülern, die die Problematik des Rundens schon verinnerlicht haben, auch durch Angabe von weiteren hundert Übungsaufgaben (dies ist keine Seltenheit bei aktueller Unterrichtspraxis) keine wesentliche Leistungssteigerung erreicht werden. Im Gegenteil, es tritt eine Situation der Langeweile und Routine ein, die Flüchtigkeitsfehlern Tür und Tor öffnet. Gleich einem Buffet wäre es in solch einer Situation wünschenswert, ein gewisses Angebot an Aufgaben auf verschiedenen Schwierigkeitsniveaus zu haben. Um im Bild des Buffets zu bleiben: Es kommt nicht darauf an, das jeder das Gleiche isst, sondern dass jeder die Nahrungsart und –menge zu sich nimmt, die für ihn am Besten ist. Genau so kann in einem Mathematikunterricht Material auf verschiedenen Ebenen angeboten werden, wenn nicht notwendigerweise von jedem Schüler verlangt wird, dass er alles verstanden haben muss. Häufig hört man an dieser Stelle das Argument, dass man es gar nicht leisten kann, so viele verschiedene Tätigkeiten in einer Klasse zu unterstützen. Mann sollte jedoch nicht unterschätzen, dass gerade die Schüler, die schon etwas weiter sind, sich mit geeignetem Material auch sehr gut selbständig beschäftigen können, oder gar anderen Schülern durch Erklärungen helfen können. Beim Runden bietet es sich beispielsweise an, wenn das Konzept verstanden ist und Stellenwertüberträge gemeistert wurden auch beispielsweise Längen auf *Halbe*- oder *Viertelmeter* zu runden. Der mathematischen Essenz des Rundens (die Zahl in einem Raster, die am nächsten am gemessenen oder beobachteten Wert liegt) kommt man damit wesentlich näher, als mit dem Kochrezept „Ab 5 aufrunden, bis 5 abrunden!“.

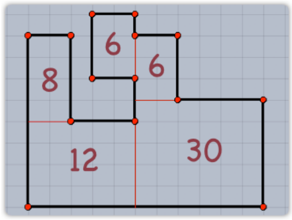
Die Sequenz, die im folgenden Abschnitt beschrieben wird, soll exemplarisch am Beispiel Flächenberechnung zeigen, wie sich im Dialog der Schwierigkeitsgrad einer Aufgabe sukzessive steigern lässt. Es ist mir durchaus bewusst, dass sich eine derartige Sequenz nur im intensiven persönlichen Dialog entwickeln lässt. Dennoch denke ich, dass sich daraus nützliche Anregungen für die Unterrichtspraxis ziehen lassen.

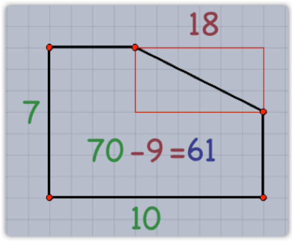
Wie groß ist eine Fläche?

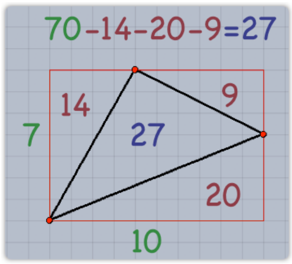
Vor ca. zwei Jahren kam meine damals achtjährige Tochter auf mich zu und meinte „Papa, lass uns doch mal Geometrie machen“ (wir hatten uns in dieser Zeit in losen Abständen zu mathematischen *Plauderstündchen* zusammengesetzt). „Was meinst Du denn genau?“ fragte ich. „Na ja, Geometrie hat doch was mit Rechnen zu tun. Kannst Du mir das erklären?“ Es ergab sich darauf hin ein Dialog, bei dem wir schrittweise immer komplexere Formen der Flächenberechnung entwickelten. Wir begannen mit einem einfachen Rechteck, bei dem zwei Seitenlängen in Kästcheneinheiten gegebne waren und bestimmten den Flächeninhalt, also die Anzahl der eingeschlossenen Kästchen (eine praktische Wiederholung für das kleine Einmaleins). Ist der Zusammenhang einmal verstanden, so kann man nicht viel mehr lernen wenn man jetzt zwanzig Aufgaben vom selben Typus berechnet. Stattdessen fingen wir an, die Aufgabenstellung zu variieren. Was passiert mit Rechtecken bei denen ein kleines Rechteck weggenommen wurde? Was passiert mit beliebig geformten (achsenparallel begrenzten) Flächen? Dies ist eine Fragestellung, bei der man sehr gut eine mathematische Grundstrategie lernen kann. Komplexe Probleme werden so in viele kleine Einzelprobleme zerlegt, dass man aus deren Lösung einfach die Gesamtlösung rekonstruieren kann. Sodann begannen wir, uns schräg begrenzten Flächen zuzuwenden. Das Grundprinzip ist schnell verstanden: Wird ein Rechteck entlang einer Diagonalen zerschnitten, so entstehen zwei Teile, die beide gleich groß sind – also halb so groß wie das Rechteck. Erstaunlicherweise reicht diese Beobachtung bereits aus, um damit den Flächeninhalt von beliebig geformten Vielecken zu bestimmen. So lange die Eckpunkte nur auf dem Gitter liegen. In der Tat ist es von diesen Überlegungen sogar nur noch ein kleiner Schritt bis hin zum Satz des Pythagoras, wie das neben stehende letzte Bild andeutungsweise erkennen lässt. Es treten rechtwinklige Dreiecke mit Kathetenlängen von 3 und 4 Einheiten auf, und man kann berechnen, dass der Inhalt des mittleren Quadrates 25 Einheiten beträgt. Also muss dessen Seitenlänge, die Hypotenuse, genau 5 Einheiten lang sein. Meine Tochter und ich haben uns an diesem Nachmittag richtig gut gefühlt.

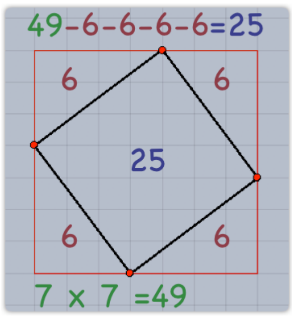






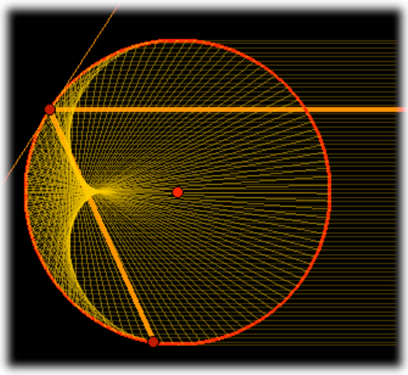






Alles in der Welt ist merkwürdig und wunderbar für ein paar wohlgeöffnete Augen

Dieses Zitat des spanischen Philosophen und Soziologen José Ortega y Gasset gilt insbesondere für mathematische Zusammenhänge. Unsere Alltagswelt ist voll von Fragen und Effekten, die Anlass zum mathematischen Nachdenken liefern. Wie viele Menus kann man zusammenstellen, wenn man 3 verschiedene Suppen, 4 Hauptgänge und 3 Desserts kochen kann? Woher kommen die charakteristischen Lichterscheinungen, die man immer wieder beobachtet, wenn die Sonne in eine Kaffeetasse scheint? Was haben Farne mit Symmetrie zu tun? Steht die Sonne in Südafrika am Mittag im Süden? Was sind die verborgenen Zusammenhänge im kleinen Einmaleins? Die Liste an spannenden Fragen ließe sich endlos fortsetzen. Im Vorschulalter sind Kinder oftmals noch sensibilisiert, derartige Fragen von sich aus zu stellen. Leider verliert sich diese Begabung zumeist, wenn mit zunehmendem Alter die Tendenz zu Zweck gerichtetem Denken sich mehr und mehr ausprägt. Fragen werden nach ihrem Nützlichkeitswert für Notengebungen oder für alltagspraktische Verrichtungen ausgesondert. Bedingt durch eine hohe zu bewältigende Stoffmenge rückt die Freude am Entdecken zunehmend in den Hintergrund. Gerade an dieser Stelle ist die Lehrperson besonders gefordert. Sie sollte zu den behandelten Themenkreisen interessante Effekte kennen, die bei den Schülern Staunen, Verwunderung und den Reiz an Neuem auslösen. Der Unterricht sollte Phasen vorsehen, in denen Schülern die Möglichkeit gegeben wird, selbst entdeckend zu lernen. Nichts behält man so gut, wie einen Zusammenhang, den man eigenständig gefunden (oder gar erforscht) hat. Gleichzeitig sollte an dieser Stelle der Wert, den selbst gemachte Entdeckungen für das Selbstwertgefühl des Schülers haben, nicht unterschätzt werden. Eine Lernumgebung, die dem Schüler Freiraum zum Entdecken bietet, lässt ihm/ihr Freiraum für individuelle Zugänge, bietet interessante Phänomene und Herausforderungen, fordert zum aktiv Werden auf und lässt genügend Raum zum Spielen und Experimentieren. Natürlich ist eine derartige Form der Beschäftigung oftmals nur sehr schwer in den üblichen Unterrichtsablauf zu integrieren. Aber im Rahmen von Projekttagen und AGs bieten sich hier vielfältige Möglichkeiten auf allen Leistungsniveaus.



Mathematik erleben und erfahren

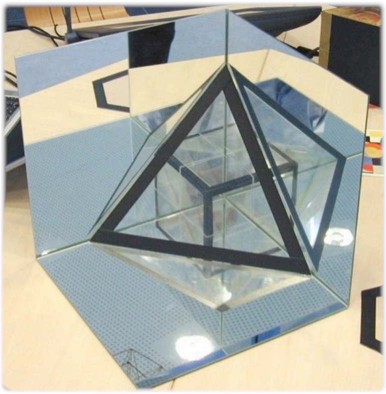
Vor nunmehr zweieinhalb Jahren haben wir am Zentrum für Mathematik der TU München eine Mathematikausstellung *ix-quadrat* eröffnet. Diese Ausstellung ist darauf angelegt, ein breites Zielpublikum anzusprechen, angefangen vom Grundschüler, bis hin zum Abiturienten, Studenten oder gar Gastwissenschaftler. Die Ausstellung ist als Wechselausstellung angelegt und zentriert sich immer um gewisse Themenschwerpunkte (derzeit Symmetrie, Rechen und Zeichenapparate und Graphiken des Künstlers M.C. Escher). Zu jedem Bereich werden Modelle zum Anschauen, mathematische Experimente zum Anfassen, Texte sowie virtuelle Computerinstallationen angeboten. Es gibt dort verschiedene Spiegelexperimente, eine rechnende Murmelbahn, einen Computer aus Lego, mathematische Puzzelspiele und vieles mehr. Die Nachfrage liegt derzeit in Stoßzeiten bei bis zu 6 geführten Schulklassenbesuchen pro Woche. Die Rückmeldungen, die wir von den Besuchern der Ausstellung erhalten, sind relativ einheitlich und (erfreulicherweise) fast ausschließlich positiv. Nahezu alle Ausstellungsbesucher nehmen die spielerischen Zugänge zu mathematischen Phänomenen dankbar auf. Während die jüngeren Besucher der Ausstellung positiv berührt sind von der Möglichkeit, Mathematik einmal aus einem anderen als dem schulischen Blickwinkel zu erleben und nicht selten in stundenlanges kreative Spiel verfallen, erhält man von älteren Besuchern oftmals das Feedback: „Das macht ja richtig Spaß! Wenn man das uns in der Schule so erklärt hätte, dann hätte ich Mathe auch verstanden“. Ich möchte hier zwar nicht behaupten, dass aktive, Erlebnis orientierte Zugänge zu Mathematik automatisch in einem besseren Verstehen münden (dazu sind noch viele andere Faktoren notwendig). Dennoch können durch Erlebnis orientierte Zugänge zur Mathematik Hemmschwellen und Ängste abgebaut werden und Interesse geweckt werden. Dies wiederum kann dann als ein Sekundäreffekt das Lernen bestimmter sachlicher Zusammenhänge erleichtern und fördern.

Spieglein, Spieglein,...

Als ein Beispiel für Exponate in der Ausstellung möchte ich hier einfache Spiegelexperimente herausgreifen. Nicht zuletzt deswegen, weil sie sich in einer Schulklasse bereits mit wenigen und preiswerten Mitteln (ein paar quadratische Spiegelkacheln aus einem Baumarkt, etwas Tesafilm und farbige Pappe) nachvollziehen lassen. Jeder kennt von der Schule einfache Einführungen in die Begriffswelt der Symmetrie. Zumeist werden einfache Spiegel- und (evtl.) Drehsymmetrien behandelt. Vom Standpunkt des Mathematikers ist Symmetrie jedoch

ein zentrales Ordnungsprinzip, das sich praktisch durch alle Teile der Wissenschaft und der Natur zieht. Vom Standpunkt des Mathematikpädagogen bietet Symmetrie weiterhin die Möglichkeit, mit einfachen Materialien elementare phänomenologische Grunderfahrungen mit wichtigen mathematischen Strukturprinzipien zu machen. Natürlich ist es zunächst einmal interessant, sich in der Umgebung auf die Suche nach symmetrischen Figuren zu machen, Ornamente, Gesichter, Badzimmerkacheln bieten bereits reichhaltiges Anschauungsmaterial. Weiterhin kann man bereits mit einem Spiegel und einer Zeitschrift interessante symmetrische Bilder erzeugen, indem man den Spiegel senkrecht auf Abbildungen stellt. Dies eignet sich auch zum Untersuchen von Symmetrieachsen beispielsweise in menschlichen Gesichtern. Richtig spannend wird es aber, wenn man mit zwei oder mehr Spiegeln arbeitet und Szenearien schafft, in denen Spiegelbilder wieder gespiegelt werden. Hält man beispielsweise *zwei* Spiegelkacheln parallel zueinander, so dass die spiegelnden Seiten einander zugewandt sind, so kann man wenn man flach über einen der Spiegel schaut einen Blick in die *Unendlichkeit* wagen. Sehr reizvoll und lehrreich ist es auch, zwei quadratische Spiegelkacheln miteinander an einer Kante klappbar zu verbinden. Stellt man solch eine Spiegelecke auf eine Anordnung bunter Papierschnipsel, so spiegeln sich diese Schnipsel mehrfach, je nach eingestelltem Winkel (Bild oben). In der Tat geht die Spiegelung nur bei bestimmten Winkeln gut auf. Für 90° ergeben sich vier Bilder, (inclusive des Originals) für 60° sechs, für 45° acht,... (welche Winkel geben wohl noch sinnvolle Spiegelbilder?). Schon allein die rechwinklige Anordnung zweier Spiegel birgt viele Überraschungen. Neben den beiden direkten Spiegelbildern entsteht ein gespiegeltes Spiegelbild. Im Gegensatz zu normalen Spiegelbildern sieht man sich in diesem doppelt gespiegelten Spiegelbild nicht seitenverkehrt.

Drei quadratische Spiegel lassen sich zum Beispiel, zu einer dreieckigen Kalleidoskopröhre zusammenkleben. Objekte in einem solchen Kalleidoskopspiegel werden unendlich oft (und in überraschenden Anordnungen) reflektiert. Sind alle Spiegel dabei quadratisch, so ergeben sich an den Kanten Winkel von genau 60°. D.h. An jeder Kante wird ein Objekt sechsfach gespiegelt. Mit ein wenig Bastelspaß und Mühe kann man sich auch Spiegel für andere Anordnungen zurecht scheiden. Die Kantenwinkel (45°, 45°, 90°) und (30°, 60°, 90°) ergeben faszinierende Arrangements. Mit drei quadratischen Spiegeln ist aber noch eine prinzipiell



andere Anordnung möglich. Man kann die drei Spiegel so wie drei Seitenflächen eines Würfels zusammenkleben, die sich in einem Eckpunkt berühren. Je zwei Spiegel stehen bei dieser Anordnung senkrecht aufeinander. Es ergeben sich (inklusive dem Original) insgesamt acht Bilder. Diese Spiegelungen setzen sich nun aber auch quasi dreidimensional räumlich fort. Bereits das Einlegen eines einfachen Dreiecks in diese Anordnung resultiert im Entstehen eines räumlichen Körpers. Durch gezieltes Anfertigen von Einlegestücken lassen sich mit dieser *Würfelspiegelecke* Sternförmige Körper, oder gar aus Fünfecken und Sechsecken bestehende Fußbälle erzeugen.

Richtig oder Falsch, oder…?

Ich möchte diese Ausführungen beschließen mit einem Zitat des Bielefelder Mathematikdidaktikers Prof. Wilhelm Schütte, aus einem Text zum Thema „Offenheit und Zielorientierung im Mathematikunterricht." Der Text findet sich auf einer Internetseite, die sich mit mannigfaltigen Aspekten des mathematischen Grundschulunterrichts auseinandersetzt und viele nützliche Gedanken zu diesem Thema zusammenstellt:

„Ein *inhaltlich offener Mathematikunterricht* verzichtet auf starre Detailfestlegungen, z.B. auf fixe Zahlenraumgrenzen oder auf unflexible Zuweisungen von Unterrichtsinhalten an bestimmte Schuljahre. Er reduziert die Anzahl der Routineübungen und ersetzt sie zunehmend durch herausfordernde Aufgaben. Er gibt Gelegenheit für ein "Mathematiklernen in Sinnzusammenhängen" (Schütte 1994) und stellt beziehungshaltige und fortsetzbare Probleme in den Mittelpunkt des Unterrichts.

In einem *methodisch offenen Unterricht* gibt es keine vorgeschriebenen, einheitlichen Rechenverfahren für alle Kinder. Vielmehr werden Aufgaben bewusst so ausgewählt, dass sie unterschiedliche Zugänge und Lösungswege erlauben. Die individuellen Vorgehensweisen der Kinder werden gewürdigt. Insgesamt wird die Utopie eines angeleiteten Lernens im Gleichschritt ersetzt durch Sensibilität für die individuellen Lernwege der Kinder. Fehler sind in einem solchen Unterricht Chancen für das Weiterlernen, nicht nur Grundlage für die Notengebung, erst recht kein Zeichen für Dummheit oder Faulheit." (W. Schipper, 2001, Quelle www.grundschule.bildung-rp.de/gs/mathematik/schipper-basis.html)

Lesetipps:

Christian Dahl, Sven Nordquist:
Zahlen Spiralen und magische Quadrate – Mathe für jeden, Oetinger Verlag 1996.

Anregungen, mathematische Spiele und Bastelanleitung, schön bebildert und gut geschrieben.

Stanislas Dehaene:
Der Zahlensinn, Birkhäuser Verlag, 1999.

Auseinandersetzung mit der Psychologischen und Entwicklungspsychologischen Seite von Zahlenwahrnehmung. Spannende interkulturelle Vergleiche.

Hartmut Spiegel und Christoph Selter:
Kinder & Mathematik – Was Erwachsene Wissen sollten, Kallmayer Verlag, 2003.

Sehr lesenswerte Auseinandersetzung mit Fragen der mathematischen Grundschuldidaktik. Facettenreich, lebhaft illustriert mit vielen praktischen Fallbeispielen.

Carol Vordermann:
Spannendes aus der Welt der Mathematik, Kaleidoskop Buch im Christian Verlag, 2000.

Gelungene Sammlung von mathematischen Experimenten und Bastelanleitungen. Phänomenologische Zugänge zu vielen Bereichen der Mathematik

Webtipps:

`www.matheprisma.uni-wuppertal.de/`
Modulsammlung interaktiver Applets für verschiedene Bereiche der Schulmathematik. Eigentlich erst ab Mittelstufe, die einfacheren Sachen sind aber auch durchaus für Grundschule geeignet.

`www.mathematikum.de/`
Homepage der Gießener Mathematikausstellung *Mathematikum.* Infos, Veranstaltungen, Führungen. Online-shop für mathematische Spiele.

`www-m10.ma.tum.de/ix-quadrat/`
Homepage der Mathematikausstellung ix-quadrat. Impressionen, Texte Java Applets und Fotos. Und nicht zuletzt die Kontaktadresse.

`www.grundschule.bildung-rp.de/gs/`
Sammlung von Materialen und Essays rund um das Thema Mathematikdidaktik in der Grundschule. Teilweise sehr lesenswerte Beiträge.

Der Autor:
Prof. Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert, Jahrgang 1963, Darmstadt/Deutschland. Studium der Mathematik an der TH-Darmstadt, Promotion an der TH Darmstadt und an der KTH Stockholm. Unterrichtstätigkeit an der TU Berlin, der ETH Zürich, derzeit Lehrstuhlinhaber am Zentrum Mathematik der TU München. Hauptsächliche Forschungsgebiete: Geometrie, Visualisierung und Computergeometrie. Autor des mit dem deutschen Bildungssoftwarepreis und dem European Academic Software Award prämierten Geometrieprogramms Cinderella. Initiator und federführender Leiter der Mathematikausstellung ix-quadrat in München. Vater einer 10-jährigen Tochter.